

[zpět na 8. cvičení](#)

## Transformace v rovině

$$P = [p_1; p_2]; P' = [p'_1; p'_2], \text{ zobrazení } \mathcal{Z}: P \rightarrow P': \begin{aligned} p'_1 &= f(p_1; p_2) \\ p'_2 &= g(p_1; p_2) \end{aligned} \quad (1)$$

### Příklad:

$$\mathcal{Z}: \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$$

$$A = [0; 0] \quad p'_1 = p_1^2 - 2\sqrt{p_2} + 2 \quad A' = [2; -1]$$

$$B = [4; 1] \quad p'_2 = \sqrt{p_1} + p_1 p_2 - 1 \quad B' = [16; 4]$$

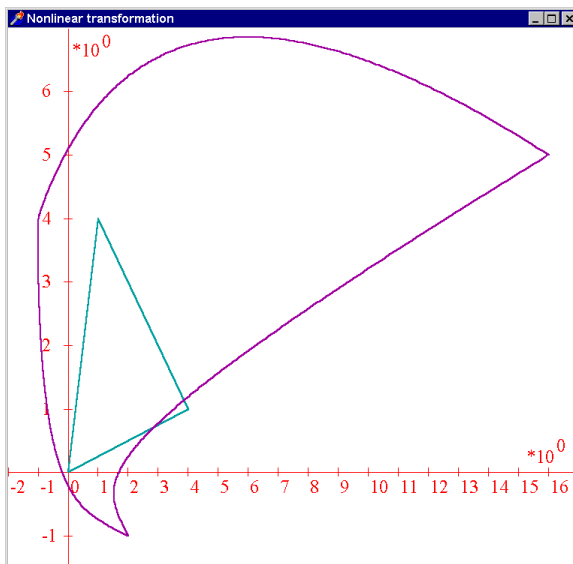
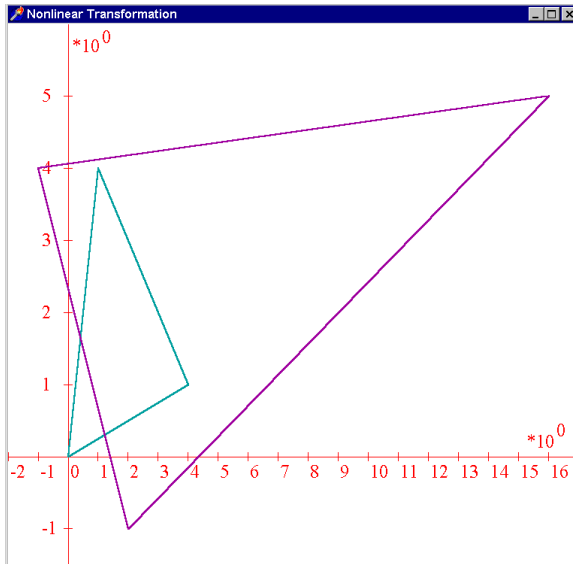
$$C = [1; 4] \quad C' = [-1; 4]$$

$$S_{A'B'} = [9; -2]$$

$$S'_{AB} = [6 - \sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$S_{AB} = [2; 0.4]$$

← špatně !!



Obrazem úsečky nemusí být úsečka  $\Rightarrow$  při nelineárních transformacích vektorových dat je třeba i s úsečkou zacházet jako s křivkou - transformovat jako "křivku"

$$p_1 = A_1 + t(B_1 - A_1)$$

$$p_2 = A_2 + t(B_2 - A_2)$$

[Zdrojový kód](#)

[Spustit](#)

[Nelineární transformace obrazu](#)

ht:=0.005;t:=0;i:=0;

**Repeat**

P[i,1]:=A[1]+t\*(B[1]-A[1]);P[i,2]:=A[2]+t\*(B[2]-A[2]);

Z(P[i],Q[i]); t:=t+ht;i:=i+1

**until** t>1;

PolyLine(Q,i,Red,Green,Blue);

## Lineární transformace

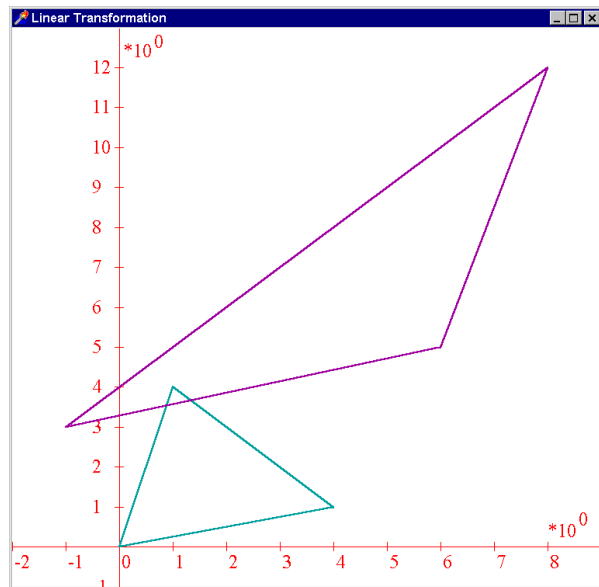
Transformaci  $\mathcal{Z}$  nazveme lineární, jestliže soustava určující transformaci je lineární, tj. jestliže vztah mezi souřadnicemi bodů  $P$ ,  $P'$  lze vyjádřit soustavou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} p'_1 &= z_{11}p_1 + z_{21}p_2 + r_1 \\ p'_2 &= z_{12}p_1 + z_{22}p_2 + r_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{Z}^* \mathbf{P} + \mathbf{r}$$

Transformace  $\mathcal{Z}$  je tak určena maticí  $\mathbf{Z}^*$  a vektorem  $\mathbf{r}$ .

**Příklad:** Jsou dány body  $A=[0;0]$ ;  $B=[4;1]$ ;  $C=[1,4]$  a transformace

$$\mathcal{Z}: \begin{aligned} p'_1 &= -2p_1 + p_2 + 6 \\ p'_2 &= -p_1 + 2p_2 + 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Určeme body  $A'$ ;  $B'$ ;  $C'$ !

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ B' &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ C' &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[Zdrojový kód](#)

[Spustit](#)

**Homogenní souřadnice:** Uspořádanou trojici  $(\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3)$ ;  $\zeta_3 \neq 0$  nazýváme pravoúhlé homogenní souřadnice bodu M v rovině, jestliže platí  $\frac{\zeta_1}{\zeta_3} = x$ ;  $\frac{\zeta_2}{\zeta_3} = y$ , kde  $[x, y]$  jsou kartézské souřadnice bodu M v rovině.

Projektivní transformace roviny:

$$\begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \zeta'_2 \\ \zeta'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & z_{31} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

Je-li  $z_{31} = z_{32} = 0$ ,  $z_{33} = \zeta_3 = 1$ , pak

$$\begin{aligned} p'_1 &= z_{11}p_1 + z_{21}p_2 + r_1 \\ p'_2 &= z_{12}p_1 + z_{22}p_2 + r_2 \\ 1 &= 0p_1 + 0p_2 + 1 \cdot 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & r_1 \\ z_{12} & z_{22} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}'^T = \mathbf{Z}^T \mathbf{P}^T$$

Transpozice:

$$\begin{aligned} p'_1 &= z_{11}p_1 + z_{21}p_2 + r_1 \\ p'_2 &= z_{12}p_1 + z_{22}p_2 + r_2 \\ 1 &= 0p_1 + 0p_2 + 1 \cdot 1 \end{aligned} \Rightarrow (p'_1 \ p'_2 \ 1) = (p_1 \ p_2 \ 1) \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 \\ z_{21} & z_{22} & 0 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Z}$$

```

procedure SetMatrix (var Z:TMatrix);
begin
    Z[1,1]:=-2;Z[1,2]:=-1;Z[1,3]:=0;
    Z[2,1]:= 1;Z[2,2]:= 2;Z[2,3]:=0;
    Z[3,1]:= 6;Z[3,2]:= 5;Z[3,3]:=1;
end;

```

```

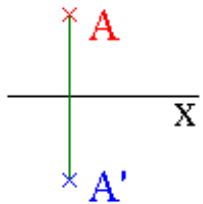
procedure TransOfPoint
    (X:TPoint;Z:TMatrix;var Xc:TPoint);
var i,j:Byte;
begin
    for i:=1 to 3 do Xc[i]:=0;
    for j:=1 to 3 do
        for i:=1 to 3 do Xc[j]:=Xc[j]+X[i]*Z[i,j];
    end;

```

## Základní lineární transformace v rovině

### Osová souměrnost

podle osy x



$O(x)$

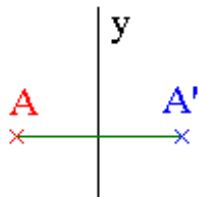
$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$\mathbf{O}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Osová souměrnost

podle osy y



$O(y)$

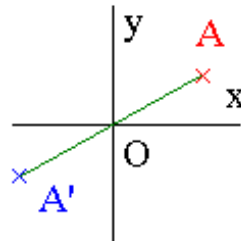
$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$\mathbf{O}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Středová souměrnost

podle počátku



$S(O)$

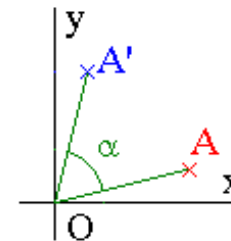
$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Rotace

kolem počátku



$R(O, \alpha)$

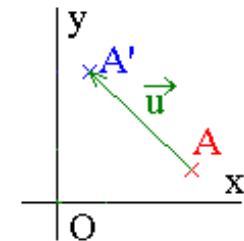
$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Translace

o vektor u



$T(u)$

$$x' = x + u_1$$

$$y' = y + u_2$$

$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Příklad – otočení trojúhelníka o $60^\circ$

**Procedure** Rotation

(Alfa:Real; var R:TMatrix);

**begin**

R[1,1]:= cos(Alfa); R[1,2]:= -sin(Alfa); R[1,3]:=0;

R[2,1]:= -sin(Alfa); R[2,2]:= cos(Alfa); R[2,3]:=0;

R[3,1]:= 0; R[3,2]:= 0; R[3,3]:=1;

**end;**

.....

Alfa:=pi/3; Transf2D.Rotation(Alfa,Z);

Transf2D.TransOfPoint(A,Z,Ac);

Transf2D.TransOfPoint(B,Z,Bc);

Transf2D.TransOfPoint(C,Z,Cc);

Draw2D.Triangle(Ac,Bc,Cc,Red,Green,Blue);

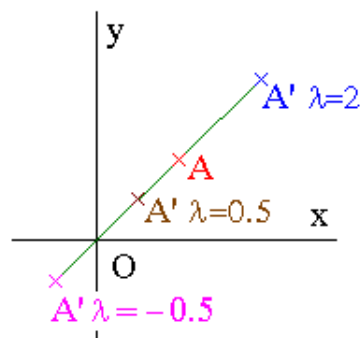
.....

[Editovat příklad](#)

[Spustit program](#)

## Stejnolehlost (homotetie)

se středem v počátku

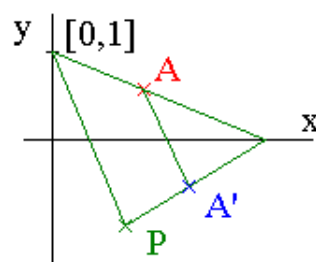


$$H(O, \lambda)$$

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \lambda y \end{aligned} \quad H(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Osová afinita

s osou v ose x

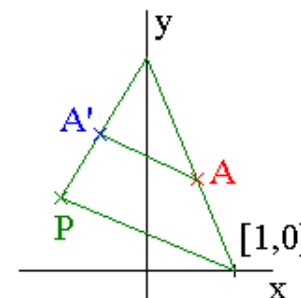


$$A(x, P)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 y \\ y' &= p_2 y \end{aligned} \quad A(x, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

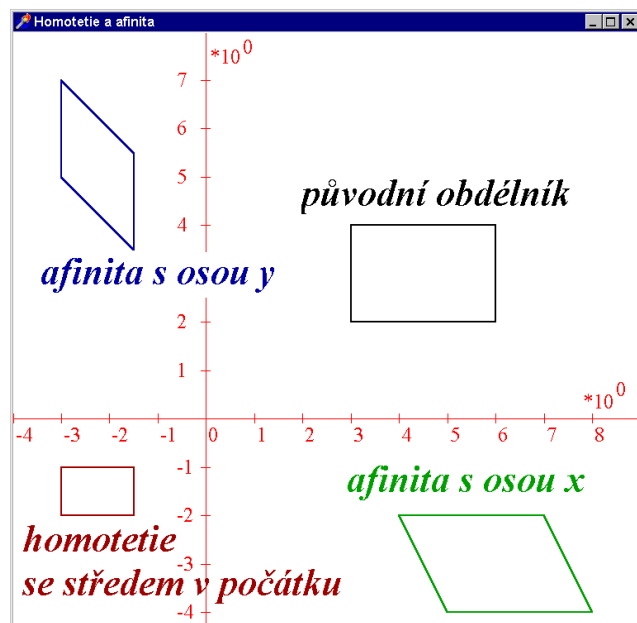
## Osová afinita

s osou v ose y



$$A(y, P)$$

$$\begin{aligned} x' &= p_1 x \\ y' &= p_2 x + y \end{aligned} \quad A(y, p) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



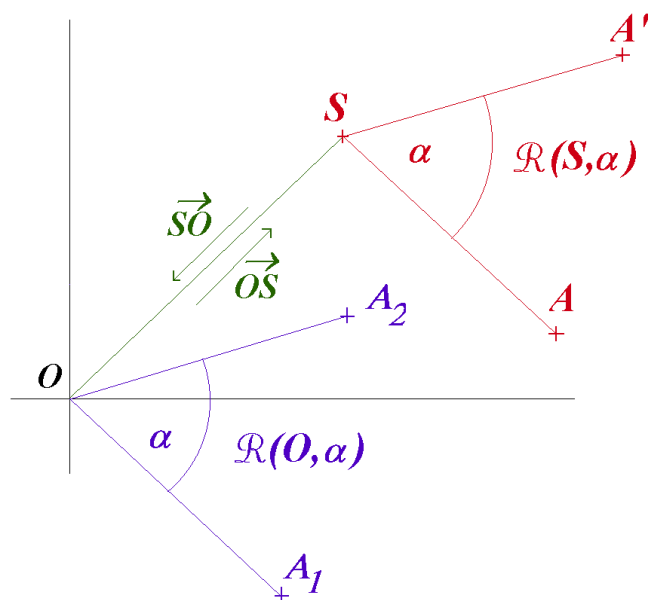
**Stejnolehlost** - zvětšování  
a zmenšování  
**Osová afinita** - "zkosení."

Příklady:

[Vržený stín](#)

[Pohyb trojúhelníka](#)

## Skládání lineárních transformací



### Rotace kolem obecného bodu:

$$R(S, \alpha), S \neq O$$

$$T(\overrightarrow{SO}) : S \rightarrow O; A \rightarrow A_1;$$

$$R(O, \alpha) : A_1 \rightarrow A_2; T(\overrightarrow{OS}) : O \rightarrow S; A_2 \rightarrow A'$$

nejdřív  $T(\overrightarrow{SO})$ , potom  $R(O, \alpha)$ , nakonec  $T(\overrightarrow{OS})$

$$h(x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

$$R(S, \alpha) = \underbrace{T(\overrightarrow{OS}) \circ R(O, \alpha) \circ T(\overrightarrow{SO})}_{\text{směr výpočtu} \leftarrow}$$

$$R(S, \alpha) = \underbrace{T(\overrightarrow{OS}) \square R(O, \alpha) \square T(\overrightarrow{SO})}_{\text{směr výpočtu} \rightarrow}$$

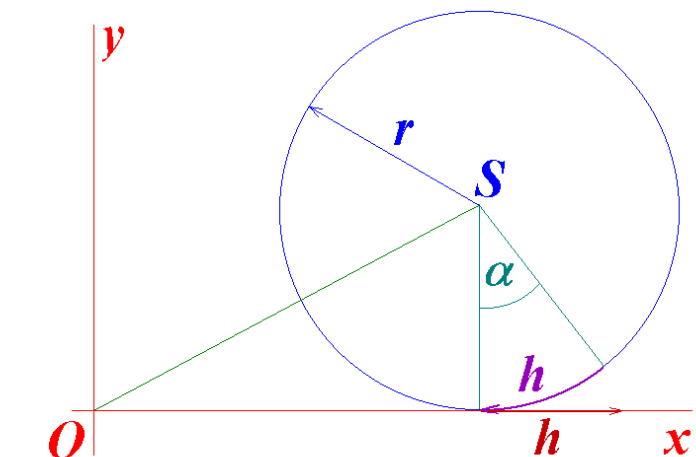
```

Procedure   GenRot(S:TPoint;Alfa:Double; var Mat:TMatrix);
var Mat1,Mat2   :TMatrix;                {mezivýsledné matice}
    v             :TVector;                {vektor posunutí}
begin
  V[1]:=-S[1];V[2]:=-S[2];Trans (V,Mat1);  {nastavení matice posunutí}
  Rot  (Alfa,Mat2);                         {nastavení matice rotace kolem počátku}
  Multip(Mat1,Mat2,Mat);                    {součin mezivýsledků}
  V[1]:=-V[1];V[2]:=-V[2];                 {vektor zpětného posunutí}
  Mat1:=Mat;
  Trans  (V,Mat2);                          {matice zpětného posunutí}
  Multip (Mat1,Mat2,Mat);                   {matice výsledné transformace}
end;
  
```

[Editovat příklad](#)

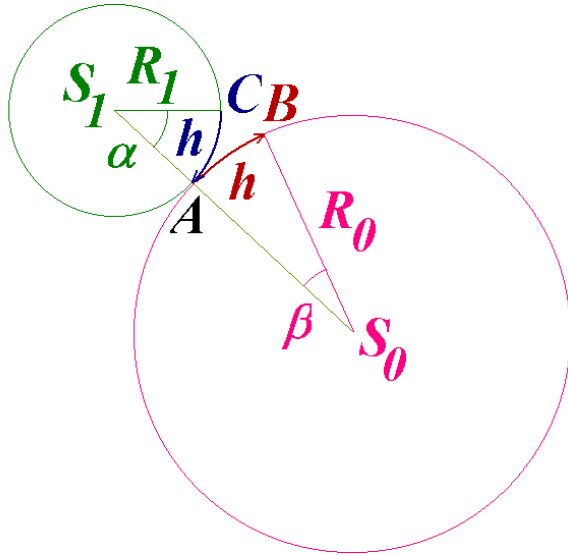
[Zdrojový kód](#)

[Spustit](#)



Spustiteľný kód

## Valení kružnice po kružnici



Tento pohyb musíme složit z rotace valící se kružnice okolo jejího středu  $S_1$  o úhel  $\alpha$  a rotace téže kružnice okolo středu  $S_0$  dráhy o úhel  $\beta$  tak, aby délky oblouků  $AB$ ,  $AC$  byly navzájem rovny, tj.  $R_0\beta = R_1\alpha$ .

[Zdrojový kód](#)

[Spustitelný kód](#)

Valení tří kružnic

[Spustitelný kód](#)

Valení přímky po kružnici

[Spustitelný kód](#)

[Semestrální práce na dané téma](#)